



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL 1

a) Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 \cdot 6^x - 6 \cdot 3^x - 2^x + 3$ nu este injectivă.

b) Fie funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*, f(n) = 2018n - 2017$ și $G = \{g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \mid g \circ f = 1_{\mathbb{N}^*}\}$.

Arătați că funcția definită prin $g(n) = \left\lceil \frac{n+2017}{2018} \right\rceil; g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ este din mulțimea G .

Există $h \in G$ astfel încât să avem și $f \circ h = 1_{\mathbb{N}^*}$? Argumentați răspunsul.

Rezolvare și barem:

a) Funcția se descompune în $f(x) = (3^{x+1} - 1)(2^x - 2) + 1 \dots\dots\dots(1p)$

Luăm $\begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1)=1 \\ x=-1 \Rightarrow f(-1)=1 \end{cases}$ deci $f(-1) = f(1) = 1$ i.e. f nu este injectivă.....(2p)

b) Avem $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = \left\lceil \frac{f(n)+2017}{2018} \right\rceil = n; (\forall) n \in \mathbb{N}^*. \dots\dots\dots(2p)$

Presupunem prin absurd că există o funcție $h \in G$ cu proprietatea respectivă. Atunci f și h sunt inversabile, deci bijective,.Fals! deoarece f nu este surjectivă(2p)



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL 2

a) Arătați că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 + \lg x$ este strict crescătoare.

b) Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \lg \frac{y}{x} \\ 3^{x^2+y^2-1} - 4 \cdot 3^{xy} + 9 = 0 \end{cases}.$$

Rezolvare și barem:

Din condiția de existență rezultă că x și y au același semn.

a) Avem $x \mapsto x^2$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$
 $x \mapsto \lg x$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, deci f este strict crescătoare(2p)

b) Prima ecuație a sistemului se scrie $x^2 + \lg x = y^2 + \lg y \Rightarrow f(x) = f(y)$ și din a) f

strict crescătoare implică f injectivă, deci $x=y$(2p)

Folosind aceasta, a doua ecuație a sistemului devine:

$$3^{2x^2-1} - 4 \cdot 3^{x^2} + 9 = 0$$

Notăm $3^{x^2} = t$ și obținem ecuația $\frac{1}{3}t^2 - 4t + 9 = 0$ cu soluțiile $t_{1,2} = 3$ și 9 (1p)

Deci $3^{x^2} = 3 \Rightarrow x = \pm 1$ și $3^{x^2} = 9 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$ rezultă soluțiile

$(1,1); (-1,-1); (\sqrt{2}, \sqrt{2}); (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$(2p)



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL 3

Să se rezolve ecuațiile:

(i) $\sqrt{2^{x-\frac{\pi}{4}} + 2^{\frac{\pi}{4}-x}} = \sin x + \cos x.$

(ii) $[\log_{27} x] + [\log_{27} 3x] + [\log_{27} 9x] = \log_3 \frac{81}{\sqrt[3]{x}}.$

Rezolvare și barem:

(i) Din existența avem $\sin x + \cos x \geq 0$

Din inegalitatea mediilor avem $M_s = \sqrt{2^{x-\frac{\pi}{4}} + 2^{\frac{\pi}{4}-x}} \geq \sqrt{2}$; cu egalitate $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$,

Din inegalitatea C-B-S avem $M_d = \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$, cu egalitate $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, iar de aici

obținem $x = \frac{\pi}{4}$ soluția unică a ecuației.....(3p)

(ii) Folosind proprietățile logaritmului ecuația se scrie

$$\left[\frac{\log_3 x}{3} \right] + \left[\frac{\log_3 x}{3} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{\log_3 x}{3} + \frac{2}{3} \right] = 4 - \frac{\log_3 x}{3} \quad (1) \dots\dots\dots(1p)$$

Folosind identitatea lui Hermite (1) devine $[\log_3 x] = 4 - \log_{27} x \Leftrightarrow [3t] = 4 - t \quad (2)$

unde $t = \log_{27} x$. Din (2) avem $4 - t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$ și deci, $t=1$ de unde $x=27$ soluție.....(3p)



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A X-A**

SUBIECTUL 4

a) Se dau numerele complexe de modul r $z_1 = a + bi$ și $z_2 = b + ai$. Arătați că $z_1 = \frac{r^2 i}{z_2}$.

b) Pe tablă, profesorul scrie din culegere p numere complexe $z_k = a_k + b_k i$ de modul $|z_k| = k$, $k = 1, 2, \dots, p$ pe care elevii trebuie să le înmulțească. Din greșală, la fiecare număr complex profesorul schimbă între ele părțile reale și imaginare și astfel elevii obțin rezultatul $-p!$. Care este rezultatul înmulțirii în culegerea de probleme?

Rezolvare și barem:

a) Calculând avem $z_1 z_2 = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i = r^2 i$(2p)

b) Folosind a) avem

$$z_1 z_2 \dots z_p = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \dots (a_p + b_p i) = \frac{i}{b_1 + a_1 i} \frac{2^2 i}{b_2 + a_2 i} \dots \frac{p^2 i}{b_p + a_p i} = \frac{(p!)^2 i^p}{-p!} = p! i^{p-2}.$$

.....(5p)